Exponenciális és logaritmikus kifejezések
Megoldások

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelü egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ **(4 pont)**

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ **(4 pont)**

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ **(4 pont)**

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1,5\cos x\right)}$ **(4 pont)**

Megoldás:

a) A nevező nem lehet 0, ezért $2^{x-1}-2\neq 0$, (1 pont)
ebből $x\neq 2$. (1 pont)
A továbbiakban a tört akkor 0, ha számlálója 0, tehát $2x^2+x-10=0$, azaz $x_1=2$ és $x_2=-2,5$. (1 pont)
Így az egyenletnek csak egy valós megoldása van: $\boldsymbol{x=-2,5}$. (1 pont)

b) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 1. feladat*

c) A logaritmus értelmezése szerint: $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$. (1 pont)
Az első egyenlet megoldásai azon x valós számok, amelyekre $x<-3$ vagy $x>2$. (1 pont)
a másodiké: $-1<x<1$. (1 pont)
A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme, így az egyenletnek nincs megoldása. (1 pont)

d) A jobb oldali kifejezés az értelezési tartományán csak nem negatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$. (1 pont)
Ez csak $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ esetén teljesül. (1 pont)
De mivel $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén, (1 pont)
és nullára a logaritmus nincs értelmezve, **így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, így nincs megoldása.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot\lg\left(x^2-8\right)=0$ **(5 pont)**

b) $x^2-|x|=6$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus értelmezése alapján: $x^2-8>0$ ($x<-2\sqrt{2}$ vagy $x>2\sqrt{2}$) (1 pont)
Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik szorzótényező 0,
azaz, ha $x-2=0$ vagy $\lg\left(x^2-8\right)=0$.
1. eset: $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ (1 pont)
2. eset: $\lg\left(x^2-8\right)=0\Leftrightarrow\lg\left(x^2-8\right)=\lg 1$ (1 pont)
$x^2-8=1\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x_1=3$ vagy $x_2=-3$ (1 pont)

Az $x = 2$ nem eleme az értelmezési tartománynak. Az értelmezési tartomány $x = 3$ és $x = -3$ elemei a megoldások, mert az átalakítások ekvivalensek voltak. $\boldsymbol{M} = \{\mathbf{3; -3}\}$ (1 pont)

b) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 2. feladat*

Összesen: 10 pont

3) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\mathbf{lg(x+7)+lg(3x+1)=2}$ **(5 pont)**

b) $\mathbf{2^x = 3^{2x+1}}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus azonosságait és a 10-es alapú logaritmus szigorú monotonitását felhasználva, megoldandó a $(x+7)(3x+1)=100$ másodfokú egyenlet. (1 pont)

Ezt megoldva: $x_1 = -\frac{31}{3}$, $x_2 = 3$. (2 pont)

Mivel a bal oldal értelmezése alapján $x > -\frac{1}{3}$, ezért $x_1 = -\frac{31}{3}$ nem gyöke az egyenletnek. (1 pont)

Az $\boldsymbol{x = 3}$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) A jobb oldalon alkalmazva a hatványozás azonosságait, megoldandó a $2^x = 3 \cdot 9^x$ egyenlet. (2 pont)

Ebből rendezéssel kapjuk, hogy $\left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{1}{3}$ (2 pont)

Innen $x = \log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{9}{2}} \approx \mathbf{-07304}$ (1 pont)

A kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet (1 pont)

Összesen: 11 pont

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\mathbf{\frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6} = \sin\frac{\pi}{2} + 2^{\log_2 9}}$$ **(11 pont)**

Megoldás:

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ (1 pont)

$\lg 1 = 0$ (1 pont)

$2^{\log_2 9} = 9$ (1 pont)

Így az $\frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6} = 10$ egyenletet kell megoldani, ebből $x^2 = 4$. (4 pont)

$x_1 = 2$ (1 pont)

$x_2 = -2$ (1 pont)

Ellenőrzés:

$\boldsymbol{x_1 = 2}$ jó megoldás, (1 pont)

$x_2 = -2$ nem jó megoldás. (1 pont)

Összesen: 11 pont

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^2 = |x-6|$$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}\right\}$$ **(9 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 3. feladat*

b) $x>0$ és $y>1$ a logaritmus értelmezése miatt. (1 pont)

A logaritmus azonosságait használva,

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= \lg x^2 \\ \lg x &= \lg 2(y-1) \end{aligned}\right\}.$$ (2 pont)

Az lg függvény szigorú monoton nő. (1 pont)

$$\left.\begin{aligned} x+y &= x^2 \\ x &= 2y-2 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezzük *x*-et, behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy $4y^2-11y+6=0$. (1 pont)

Ennek valós gyökei 2 és 0,75. (1 pont)

Az $y>1$ miatt 0,75 nem eleme az értelmezési tartománynak. (1 pont)

Ezért csak $\boldsymbol{y=2}$ és így $\boldsymbol{x=2}$ lehetséges. A $(2;2)$ számpár megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 14 pont

6) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $0{,}5^{2-\log_{0,5}x}=3$**, ahol** $x>0$ **és** $x\in\mathbb{R}$ **(4 pont)**

b) $7+6\log_x\frac{1}{2}=\log_2 x$ **, ahol** $1<x\le 2$ **és** $x\in\mathbb{R}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az $0{,}5^{2-\log_{0,5}x}=3$ egyenletben a hatványozás megfelelő azonosságát alkalmazva, az $\dfrac{0{,}5^2}{0{,}5^{\log_{0,5}x}}=3$ egyenlethez jutunk. (1 pont)

Innen a logaritmus definíciója szerint $\dfrac{0{,}5^2}{x}=3$ egyenlet adódik. (2 pont)

Ebből $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{12}}$. (1 pont)

b) Mivel $\log_x\dfrac{1}{2}=\dfrac{\log_2\frac{1}{2}}{\log_2 x}=-\dfrac{1}{\log_2 x}$. (1 pont)

Így a megoldandó egyenlet: $7-\dfrac{6}{\log_2 x}=\log_2 x$. (1 pont)

Mindkét oldalt $\log_2 x$-szel szorozva, és az egyenletet nullára redukálva: $\log_2{}^2 x-7\log_2 x+6=0$. (1 pont)

A $\log_2 x$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\log_2 x=6$ vagy $\log_2 x=1$ (1 pont)

$x=64$ vagy $x=2$. (1 pont)

Mivel $1 < x \le 2$, a 64 nem megoldás. (1 pont)

A megadott halmazon az egyenleteknek egy megoldása van, a 2. (1 pont)

Összesen: 11 pont

7) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0, x \ne 1$ és $y > 0, y \ne 1$.

$$\left.\begin{aligned}\log_x y + \log_y x = 2\\ \sin(2x+3y) + \sin(4x+y) = 1\end{aligned}\right\}$$ **(13 pont)**

Megoldás:

Áttérve azonos alapú logaritmusra: $\log_x y + \dfrac{1}{\log_x y} = 2$. (2 pont)

Mivel egy pozitív számnak és a szám reciprokának összege pontosan akkor 2, ha a szám 1, (2 pont)

ezért $\log_x y = 1$, (1 pont)

azaz $x = y$. (1 pont)

Behelyettesítve a második egyenletbe: $2\sin 5 = 1$, azaz $\sin 5x = \dfrac{1}{2}$. (1 pont)

Innen $5x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, (1 pont)

vagy $5x = \dfrac{5\pi}{6} + 2l\pi$, (1 pont)

ahol $k \in \mathbb{N}$ és $l \in \mathbb{N}$. (1 pont)

A megoldások így: $\boldsymbol{x_1 = y_1 = \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2}{5} \cdot k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{N})}$, (1 pont)

és $\boldsymbol{x_2 = y_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{5} \cdot l \cdot \pi \ \ (l \in \mathbb{N})}$ (1 pont)

A kapott értékek kielégítik az egyenletet. (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right) + \log_y\left(x^3y\right) = 9\\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 0\end{aligned}\right\}$$ **(16 pont)**

Megoldás:

A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek. (1 pont)

Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk át a logaritmus azonosságát használva:

$\log_x\left(x^2y^3\right) + \log\left(x^3y\right) = 2 + \log_x y + 3\log_y x + 1 = 3 + 3\left(\log_x y + \log_y x\right)$. (3 pont)

Így az első egyenlet: $\log_x y + \log_y x = 2$. (1 pont)

A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprokai, és összegük 2. (2 pont)

Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből azt kapjuk, hogy $x = y$. (2 pont)

Beírva a második egyenletbe: $\cos 2x + \cos 0 = 0$, ahonnan $\cos 2x = -1$ (2 pont)

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x = \pi + 2k\pi$,

azaz $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (3 pont)

Összevetve az $x, y > 0$ feltétellel, $\boldsymbol{x = y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$. (2 pont)

Összesen: 16 pont

9) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2 \sqrt{x}\right)$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ **(5 pont)**

c) $\log_{\sqrt{x}}\left(\cos^2 x\right)$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök miatt $x \geq 0$. (1 pont)

A logaritmus miatt $\sqrt{x} > 0$. (1 pont)

A keresett halmaz: $]0;+\infty[$. (1 pont)

b) A logaritmus miatt $\cos x > 0$. (1 pont)

A négyzetgyök miatt $\log_2(\cos x) \geq 0$, (1 pont)

azaz $\cos x \geq 1$. (1 pont)

A koszinusz függvény értékkészlete miatt $\cos x = 1$. (1 pont)

Az értelmezési tartomány tehát $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \boldsymbol{x} = \boldsymbol{k} \cdot 2\pi, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \right\}$. (1 pont)

c) A logaritmus alapjai miatt $x > 0$ és $x \neq 1$. (1 pont)

A logaritmus miatt $\cos^2 x > 0$. (1 pont)

Tehát $\cos x \neq 0$. (1 pont)

$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Az értelmezési tartomány tehát,

$\mathbb{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k} \cdot \pi \right\} \right)$ **ahol** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

10) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2} = -x$ **(4 pont)**

b) $2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$ $\quad (x \neq -4)$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 8. feladat*

b) Közös alapra hozva a két oldalt:

$4^{(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$. (1 pont)

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt az alapok elhagyhatóak:

$(x-1)(x+4) = \dfrac{x-1}{x+4}$. (1 pont)

Ebből $\boldsymbol{x_1 = 1}$ vagy (2 pont)

$(x+4)^2 = 1$, (1 pont)

amiből $\boldsymbol{x_2 = -3}$ vagy $\boldsymbol{x_3 = -5}$. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 11 pont

11) a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! **(5 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0$ **(6 pont)**

c) Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke! **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 6. feladat*

b) *Lásd: Trigonometria 9. feladat*

c) Az egyenlet bal oldalán 2^x kiemelhető:

$2^x\cdot\left(2\cdot 4^x+7\cdot 2^x+3\right)=0$. (1 pont)

Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, így $2^x=0$ nem lehetséges. (1 pont)

Másodfokúra visszavezethető a megmaradt egyenlet:

$2\cdot\left(2^x\right)^2+7\cdot 2^x+3=0$. (1 pont)

$2^x=-3$ vagy $2^x=-\frac{1}{2}$. (1 pont)

Az exponenciális függvény már említett értékkészlete miatt ezek nem valós gyökei, így **valóban nincs megoldása az egyenletnek**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin x-2\sin^2 x=\cos^2 x$ **(5 pont)**

b) $25^{\lg x}=5+4\cdot 5^{\lg x}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Trigonometria 10. feladat*

b) A logaritmus függvény értelmezése miatt $x>0$. (1 pont)

Mivel $25^{\lg x}=\left(5^{\lg x}\right)^2$, ezért az egyenlet (1 pont)

$\left(5^{\lg x}\right)^2-4\cdot 5^{\lg x}-5=0$ alakban is írható. (1 pont)

Az $5^{\lg x}$-re nézve másodfokú egyenlet megoldásai:

$5^{\lg x}=-1$ és $5^{\lg x}=5$. (1 pont)

Mivel $5^{\lg x}>0$, ezért $5^{\lg x}=-1$ nem lehetséges. (1 pont)

Ha $5^{\lg x}=5$, akkor $\boldsymbol{x=10}$. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) a) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok! **(6 pont)**

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0,2\\ \frac{\lg x+\lg y}{2}&=\lg\frac{x+y}{2}\end{aligned}\right\}$$

b) Oldja meg a $[-\pi;\pi]$ halmazon a $2\sin^2 x-\cos x=2$ egyenletet! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az első egyenletből $x=0{,}2-y$, ezt a másodikba behelyettesítve

$\frac{\lg(0{,}2-y)+\lg y}{2}=\lg 0{,}1$. (1 pont)

$\lg((0{,}2-y)y)=-2$ (1 pont)

(A logaritmus definíciója miatt) $(0{,}2-y)y=0{,}01$, (1 pont)

azaz $y^2-0{,}2y+0{,}01=0$. (1 pont)

Innen $\boldsymbol{y=0{,}1}$ és (visszahelyettesítve) $\boldsymbol{x=0{,}1}$. (1 pont)

Ellenőrzés például behelyettesítéssel: (az első egyenlet nyilván igaz) a második egyenlet bal oldala: $\frac{2\lg 0{,}1}{2}=-1$, jobb oldala: $\lg\frac{2\cdot 0{,}1}{2}=-1$. (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 12. feladat*

Összesen: 12 pont

14) a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\mathbf{25}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-\mathbf{50}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}+\mathbf{30}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}=\mathbf{81}$$ **(7 pont)**

b) Igazolja, hogy $\frac{\lg 5^{x}+\lg 5^{-x}}{2}\le\lg\frac{5^{x}+5^{-x}}{2}\ (x\in\mathbb{R})$. **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság miatt:

$25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}+\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=81$. (2 pont)

$\frac{81}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=81$ (1 pont)

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=5$ (1 pont)

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ (1 pont)

Az $\frac{1}{5}$ alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $\boldsymbol{x=-1}$.

(1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozva.

(1 pont)

b) ($5^{x}>0$ és $5^{-x}>0$, ezért) $\frac{\lg\left(5^{x}\cdot 5^{-x}\right)}{2}\le\lg\frac{5^{x}+5^{-x}}{2}$. (1 pont)

$0\le\lg\frac{5^{x}+5^{-x}}{2}$ (1 pont)

A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért

(1 pont)

$1\le\frac{5^{x}+5^{-x}}{2}$, vagyis $\mathbf{2\le 5^{x}+5^{-x}}$. (1 pont)

Az 5^{x} és az 5^{-x} pozitív számok egymás reciprokai, ezért az összegük legalább 2.

(2 pont)

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ebből következik, hogy az eredeti állítás is igaz. (1 pont)

Összesen: 14 pont

15) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}+\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}=324$ **(6 pont)**

b) $\sqrt{6x-24}=\sqrt{2x-7}-1$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=324$ (1 pont)

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$, így $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=324$

azaz $\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=324$ (2 pont)

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=729$ (1 pont)

Tudjuk, hogy $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=9^{-x}$

$729=9^{3}$ és az exponenciális függvény egyértelmüsége miatt $x=-3$ (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.

Tehát a megoldás $\boldsymbol{x=-3}$. (1 pont)

b) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 11. feladat*

Összesen: 13 pont

16) Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\cos x\geq\frac{1}{2}$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\frac{x}{5}-4}<20$ **(4 pont)**

c) Hány olyan egész szám van. amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?

$\log_{0,5}(2x+100)\geq-8$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Trigonometria 13. feladat*

b) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 12. feladat*

c) Értelmezési tartomány: $x>-50$. (1 pont)

(Mivel $0,5^{-8}=256$ ezért)

$\log_{0,5}(2x+100)\geq\log_{0,5}256$. (1 pont)

A 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, (1 pont)

ezért $2x+100\leq256$. (1 pont)

$x\leq78$ (1 pont)

Az értelmezési tartománnyal összevetve tehát (a valós számok halmazán) az egyenlőtlenség megoldása: $-50<x\leq78$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség egész gyökeinek a száma **128**. (1 pont)

Összesen: 14 pont

17) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{-2x+6}=x+1$ **(5 pont)**

b) $2\log_4 x^2+3\log_4 x^3=\log_4 x^4+\log_4 8^9$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 14. feladat*

b) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x>0$. (1 pont)

A logaritmus azonosságait alkalmazva:

$4\log_4 x+9\log_4 x=4\log_4 x+9\log_4 8$. (2 pont)

Egyszerűsítve $9\log_4 x=9\log_4 8$,

a logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt $x=8$. (2 pont)

Az $x>0$ feltétellel összevetve az $\boldsymbol{x=8}$ jó megoldás. (1 pont)

Összesen: 11 pont

18) a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left(2^x-3\right)^2=2^{x+1}+9$$ **(7 pont)**

Legyen $f(x)=x^2-9x+14$, ahol x valós szám.

Tekintsük a következő állítást: „Ha $x>7$, akkor $f(x)>0$."

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja! **(4 pont)**

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

a) $\left(2^x\right)^2-6\cdot 2^x+9=2\cdot 2^x+9$ (2 pont)

Ez az egyenlet 2^x-ben másodfokú.

Nullára rendezve: $\left(2^x\right)^2-8\cdot 2^x=0$ (1 pont)

$2^x=0$ vagy $2^x=8$ (1 pont)

2^x mindig pozitív, így az első eset nem lehetséges, (1 pont)

a másodikból az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt $\boldsymbol{x=3}$. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) *Lásd: Függgvények – Analízis 50. feladat*

c) *Lásd: Függvények – Analízis 50. feladat*

Összesen: 14 pont